Notazione matriciale per uguaglianze vettoriali

In uno spazio vettoriale V, supponiamo di avere k uguagliane (o anche equazioni) vettoriali

$$\begin{cases} \underline{v}'_1 = a_{11}\underline{v}_1 + a_{21}\underline{v}_2 + \ldots + a_{n1}\underline{v}_n \\ \underline{v}'_2 = a_{12}\underline{v}_1 + a_{22}\underline{v}_2 + \ldots + a_{n2}\underline{v}_n \\ \ldots \\ \underline{v}'_k = a_{1k}\underline{v}_1 + a_{2k}\underline{v}_2 + \ldots + a_{nk}\underline{v}_n \end{cases} \tag{1}$$

nelle quali i vettori $\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_k$ sono scritti come combinazioni lineari dei vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$. Come notazione, anche se tutto il discorso potrebbe essere sviluppato formalmente introducendo matrici con coefficienti in uno spazio vettoriale e studiandone l'algebra, scriviamo le relazioni (1) in forma matriciale come

$$(\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_k) = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)A \tag{2}$$

dove $A = (a_{ij})$, $i = 1, \ldots, n\, j = 1, \ldots k$ è la matrice la cui colonna l è formata dai coefficienti della combinazione lineare che esprime $\underline{v}'_l$ in funzione dei vettori $\underline{v}_1, \ldots \underline{v}_n$. In altre parole a_{hl} è il coefficiente del vettore $\underline{v}_h$ nella combinazione lineare che esprime $\underline{v}'_l$.

Esempio 1. Se $V = \mathbb{R}^n$, possiamo interpretare l'equazione (2) come una semplice equazione matriciale: supponiamo di avere

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

In questo caso abbiamo $n = 2, k = 3$ e scrivendo un vettore riga le cui componenti vettori colonna come una matrice otteniamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

dove la matrice 2×3 a destra è la matrice A.

Questa notazione è utile per fare sostituzioni: supponiamo adesso di avere una coombinazione lineare $\underline{u} = b_1\underline{v}'_1 + \ldots + b_k\underline{v}'_k$ dei vettori $\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_k$; come si scrive $\underline{u}$ come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$? Con la nostra notazione possiamo scrivere

$$\underline{u} = (\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_k)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

nella quale possiamo sostituire $(\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_k) = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)A$ per ottenere

$$\underline{u} = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)(A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}) \tag{3}$$

In effetti, andando a fare il calcolo esplicitamente, sostituendo (1) nell'espressione di $\underline{u}$ troviamo

$$\underline{u} = b_1(a_{11}\underline{v}_1 + a_{21}\underline{v}_2 + \ldots + a_{n1}\underline{v}_n) + \ldots + b_k(a_{1k}\underline{v}_1 + a_{2k}\underline{v}_2 + \ldots + a_{nk}\underline{v}_n)$$

e, riordinando i termini

$$\underline{u} = (a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \ldots + a_{1k}b_k)\underline{v}_1 + \ldots + (a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \ldots + a_{nk}b_k)\underline{v}_n.$$

Quindi il coefficiente del vettore $\underline{v}_h$ è proprio il prodotto della riga h della matrice A per il vettore colonna $\underline{b}$ esattamente come dice la formula (3) nella notazione matriciale. Questo risultato sarà utile dunque lo estendiamo e lo generalizziamo

Proposizione 1. *Con le notazioni precedenti*

i) Data l'uguaglianza $(\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_k) = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)A$, *se* $\underline{u} = b_1\underline{v}'_1, \ldots, b_k\underline{v}'_k$, *allora* $\underline{u} = c_1\underline{v}_1 + \ldots + c_n\underline{v}_n$ *dove* $\underline{c} = A\underline{b}$.

ii) Se $k = n$ *e la matrice* A *è invertibile, allora* $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n) = (\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_k)A^{-1}$

dim: La parte i) è stata dimostrata, la seconda parte può essere dimostrata nello stesso modo sostituendo esplicitamente ai vettori $\underline{v}'_i$ le loro espressioni come combinazioni lineari dei $\underline{v}_i$. Procediamo però utilizzando il risultato precedente. Innanzitutto osserviamo che se $A \in M(m, n)$ e $\underline{e}_i$ l'i-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$ allora $A\underline{e}_i = (a_{1i}, \ldots, a_{mi})^t$, ossia il prodotto dà come risultato la colonna i della matrice A. Consideriamo quindi la matrice $A^{-1} = (b_{ij})$ e la combinazione lineare

$$b_{1i}\underline{v}'_1 + \ldots + b_{ni}\underline{v}'_n = (\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_k) \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix}$$

I coefficienti della combinazione lineare sono la colonna i di A^{-1} quindi

$$(\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_k) \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix} = (\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_k)(A^{-1}\underline{e}_i)$$

Sostituendo $(\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_k) = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)A$

$$(\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_k)(A^{-1}\underline{e}_i) = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)A(A^{-1}\underline{e}_i) = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)I\underline{e}_i = \underline{v}_i.$$

Dunque possiamo scrivere ogni vettore $\underline{v}_i$ come combinazione lineare dei vettori $\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_n$ e i coefficienti della combinazione lineare sono le colonne di A^{-1}, quindi $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n) = (\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_k)A^{-1}$

Esercizio. Si mostri, come nella dimostrazione della proposizione precedente, che se

$$(\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_k) = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)A, \qquad (\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_p) = (\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_k)B$$

allora $(\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_k) = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)AB$.

Con questa notazione possiamo dimostrare

Teorema 2. *Sia $\mathcal{B} = \{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V, $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ vettori di V (attenzione, non supponiamo $k = n$). Allora*

a) I vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ sono linearmente indipendenti se e solo se i vettori delle loro coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ sono vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$

b) I vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ generano se e solo se i vettori delle loro coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ generano $\mathbb{R}^n$

dim: Ogni vettore $\underline{v}_i$ è combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$, quindi possiamo scrivere $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)A$ con A la matrice $n \times k$ delle coordinate. Supponiamo che i vettori $\underline{v}_i$ siano linearmente indipendenti, vogliamo far vedere che A ha rango k, quindi tutte le sue colonne sono vettori linearmente indipendenti: Supponiamo $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)^t \in \mathbb{R}^k$ sia una soluzione di $A\underline{x} = \underline{0}$, allora abbiamo $\underline{0} = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)A\underline{s} = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k)\underline{s} = s_1\underline{v}_1 + \cdots + s_k\underline{v}_k$, ma i $\underline{v}_i$ sono linearmente indipendenti, quindi deve essere $s_1 = \cdots = s_k = 0$, quindi il sistema $A\underline{x} = 0$ ammette solo la soluzione nulla, quindi il rango di A è k. Viceversa, se le coordinate sono linearmente indipendenti, il rango di A è k, il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ ammette solo la soluzione nulla. Allora

$$\underline{0} = b_1\underline{v}_1 + \cdots b_k\underline{v}_k = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k)\underline{b} = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)A\underline{b}.$$

I vettori $\underline{u}_i$ sono linearmente indipendenti, quindi deve essere $A\underline{b} = \underline{0}$, e poichè A ha rango k deve essere $\underline{b} = \underline{0}$.

Per la parte b), consideriamo $d = (d_1, \ldots, d_n)^t \in \mathbb{R}^n$, allora $\underline{d}$ è combinazione lineare dei vettori delle coordinate se e solo se esiste $\underline{c} \in \mathbb{R}^k$ tale che $A\underline{c} = \underline{d}$. Posto $\underline{w} = d_1\underline{u}_1 + \cdots + d_n\underline{u}_n$, se i $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ generano V, avremo che esiste $\underline{c} \in \mathbb{R}^k$ tale che

$$\underline{w} = c_1\underline{v}_1 + \cdots + c_k\underline{v}_k = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k)\underline{c} = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)A\underline{c}.$$

Poichè gli $\underline{u}_i$ formano una base, il modo di scrivere $\underline{w}$ come loro combinazione lineare è unico, dunque deve essere $A\underline{c} = \underline{d}$. Di nuovo il viceversa è simile:

consideriamo un qualsiasi vettore $\underline{z} \in V$ e scriviamolo come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$: $\underline{z} = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)\underline{a}$. I vettori delle coordinate generano $\mathbb{R}^n$, dunque esiste $\underline{s} \in \mathbb{R}^k$ tale che $A\underline{s} = \underline{a}$. Allora abbiamo $\underline{z} = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)A\underline{s} = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k)\underline{s}$ e $\underline{z}$ è combinazione lineare dei $\underline{v}_i$ che quindi generano V.

Cambiamento di coordinate e matrice di passaggio

In questo paragrafo spieghiamo come usare le matrici di passaggio da una base $\mathcal{B}$ ad una base $\mathcal{B}'$ per calcolare come cambiano le coordinate di un vettore passando da una base ad un'altra. Essenzialmente applicheremo i risultati del paragrafo precedente al caso in cui i vettori $\underline{v}_i$ e $\underline{v}'_i$ formano due basi di uno spazio vettoriale V. Prima di tutto definiamo la matrice di passaggio da una base $\mathcal{B}$ ad una base $\mathcal{B}'$ e vediamone alcune prorpietà seguendo le note del professor Savo (parte 7). In questo modo introdurremo anche le convenzioni e la notazione che useremo.

La matrice di passaggio da una base ad un'altra

La matrice di passaggio da una base $\mathcal{B}$ di uno spazio vettoriale V ad un'altra base $\mathcal{B}'$ è definita come nelle note del professor Savo: detti $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ i vettori della base $\mathcal{B}$, $\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_n$ quelli della base $\mathcal{B}'$ possiamo scrivere i vettori di quest'ultima base come combinazione lineare di quelli di $\mathcal{B}$.

$$\begin{cases} \underline{v}'_1 = a_{11}\underline{v}_1 + a_{21}\underline{v}_2 + \ldots + a_{n1}\underline{v}_n \\ \underline{v}'_2 = a_{12}\underline{v}_1 + a_{22}\underline{v}_2 + \ldots + a_{n2}\underline{v}_n \\ \ldots \\ \underline{v}'_n = a_{1n}\underline{v}_1 + a_{2n}\underline{v}_2 + \ldots + a_{nn}\underline{v}_n \end{cases} \tag{4}$$

Definizione 3. *La matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$ è la matrice la cui colonna j è il vettore delle coordinate del vettore $\underline{v}'_j$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, dunque*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Quindi la matrice di passaggio è la matrice denotata con A nel paragrafo precedente, nel caso in cui anche il secondo insieme di vettori sia una base. Denoteremo la matrice (5) di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ con ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}'}$ e le coordinate di un vettore $\underline{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ con ${}_{\mathcal{B}}(\underline{v})$.

Utilizzando il paragrafo precedente possiamo scrivere (4) in notazione matriciale

$$(\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_n) = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)\, {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}'} \tag{6}$$

Sempre come nel paragrafo precedente, se $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sono basi di $\mathbb{R}^n$ possiamo identificarle con matrici quadrate di ordine n con colonne i vettori della base, e (6) diventa un'ordinaria equazione matriciale.

Proposizione 4. *Con le notazioni precedenti*

a) La matrice di passaggio ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}'}$ *è invertibile.*

b) Viceversa se $\mathcal{B}$ *è base di uno spazio* V *di dimensione* n *e* M *è una matrice invertibile, gli* n *vettori* $\underline{v}_i'$ *definiti dalle formule (4) formano una base di* V

c) Si ha $({}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}'})^{-1} = {}_{\mathcal{B}'}M_{\mathcal{B}}$

Per la dimostrazione rimandiamo alle note del prof. Savo (parte 7, pag. 4), comunque i primi due enunciati seguono dal fatto che un insieme di vettori è linearmente indipendente se e solo se le coordinate rispetto ad una base qualsiasi sono linearmente indipendenti, il terzo è un esercizio.

Esercizio. Si mostri che se $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ sono tre basi di V, allora si ha

$$ {}_{\mathcal{B}_1}M_{\mathcal{B}_3} = {}_{\mathcal{B}_1}M_{\mathcal{B}_2}\, {}_{\mathcal{B}_2}M_{\mathcal{B}_3} $$

Esempio 2. Consideriamo le seguenti basi di $\mathbb{R}^2$

$$ \mathcal{B}_1 = \left\{ \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{B}_2 = \left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}. $$

Vogliamo trovare la matrice di passaggio ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}'}$. Secondo la definizione dobbiamo scrivere i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$, però possiamo procedere anche in questo modo: se $\mathcal{C}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$ un'altra base, la matrice di passaggio ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{D}}$ non è altro che la matrice $\mathrm{Mat}(\underline{w}_1, \dots \underline{w}_n)$, con colonne i vettori di $\mathcal{D}$. Quindi

$$ {}_{\mathcal{B}_1}M_{\mathcal{C}} = ({}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}_1})^{-1} = (\mathrm{Mat}(\underline{u}_1, \underline{u}_2))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. $$

Per l'esercizio visto prima, ${}_{\mathcal{B}_1}M_{\mathcal{B}_2} = {}_{\mathcal{B}_1}M_{\mathcal{C}}\, {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}_2}$, quindi

$$ {}_{\mathcal{B}_1}M_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} $$

In effetti possiamo verificare

$$ \underline{v}_1 = \frac{1}{2}\underline{u}_1 + \frac{3}{2}\underline{u}_2, \quad \underline{v}_2 = -\frac{3}{2}\underline{u}_1 + \frac{1}{2}\underline{u}_2. $$

Le coordinate di un vettore rispetto a basi diverse

Con la notazione del paragrafo precedente, ora consideriamo un vettore

$$\underline{u} = b_1\underline{v}'_1 + \ldots + b_n\underline{v}'_n \in V. \tag{7}$$

Per definizione, le coordinate di $\underline{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$ sono date dal vettore $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_n)^t$. Sostituendo le formule (4) nell'equazione (7) usando la notazione matriciale, troviamo

$$(\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_n)\underline{b} = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)_{\mathcal{B}}M'_{\mathcal{B}}\underline{b}$$

Dunque, sempre per definizione, le coordinate di $\underline{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono date da ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}'}\underline{b}$ e abbiamo dimostrato il seguente teorema

Teorema 5. *Sia V uno spazio vettoriale, $\underline{u} \in V$, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di V. Allora le coordinate di $\underline{u}$ rispetto a $\mathcal{B}$ e quelle rispetto a $\mathcal{B}'$ verificano la seguente formula del cambiamento di coordinate*

$$_{\mathcal{B}}(\underline{u}) = {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}'}\,{}_{\mathcal{B}'}(\underline{u}) \tag{8}$$

dove ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}'}$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ (5).

Osservazione 6. *La matrice M è detta matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$ poichè scrivendo una base di $\mathbb{R}^n$ come una matrice che continuiamo a denotare $\mathcal{B}$ si ha la formula del cambiamento di base*

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}\,{}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}'}.$$

Invece, come abbiamo visto, le coordinate cambiano nel modo inverso seguendo la formula (8), quindi per avere le coordinate di un vettore rispetto alla base $\mathcal{B}$ dobbiamo moltiplicare le coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$ per la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Esempio 3. Continuiamo ad usare le basi $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ dell'Esempio 2: abbiamo calcolato la matrice di passaggio ${}_{\mathcal{B}_1}M_{\mathcal{C}}$, applicando il teorema troviamo che le coordinate di un vettore $\underline{u} = (a, b)^t$ rispetto alla base $\mathcal{B}_1$ sono date da

$${}_{\mathcal{B}_1}M_{\mathcal{C}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(a-b)}{2} \\ \frac{(a+b)}{2} \end{pmatrix}$$

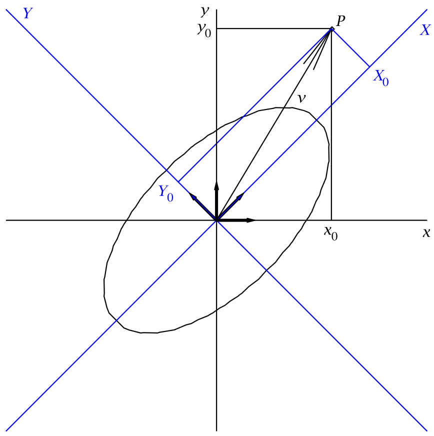
Se ora vogliamo trovare le coordinate di $\underline{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}_2$ possiamo calcolare

$${}_{\mathcal{B}_2}M_{\mathcal{B}_1}\begin{pmatrix} \frac{(a-b)}{2} \\ \frac{(a+b)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \frac{(a-b)}{2} \\ \frac{(a+b)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{(a-b)}{2} \\ \frac{(a+b)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(2a+b)}{5} \\ \frac{(2b-a)}{5} \end{pmatrix}$$

Possiamo verificare

$$\frac{2a+b}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2b-a}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Cambiare base spesso può semplificare molto un problema: vediamo un esempio geometrico



Esempio 4. L'ellisse in figura ha come assi di simmetria le rette $y = x$, $y = -x$. Prendendo queste due rette come sistema di riferimento cartesiano XY l'equazione dell'ellisse è molto semplice:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{9}$$

Come trovare la sua equazione nel riferimento xy? I versori $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ degli assi di questo riferimento hanno coordinate $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^t$ e $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^t$ rispetto ai versori della base canonica che sono i versori del riferimento xy. La matrice di passaggio dalla base canonica alla base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ quindi è

$${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Il vettore $\overrightarrow{v}$ ha coordinate $(x_0, y_0)^t$ rispetto alla base canonica, quindi il suo vertice P ha coordinate (x_0, y_0) nel riferimento xy. Nel riferimento XY le coordinate di P saranno date da (X_0, Y_0), dove $(X_0, Y_0)^t$ sono le coordinate di $\overrightarrow{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, dunque

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} = {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}{}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_0+y_0}{\sqrt{2}} \\ \frac{-x_0+y_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Passare dal riferimento xy al riferimento XY significa dunque fare un cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} X = \dfrac{x_0 + y_0}{\sqrt{2}} \\ Y = \dfrac{-x_0 + y_0}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione (9), troviamo l'equazione dell'ellisse nel riferimento xy:

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})x^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})y^2 + (\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2})xy - 1 = 0$$

Possiamo usare la matrice di passaggio tra due basi per cambiare le coordinate in spazi vettoriali qualsiasi:

Esempio 5. Consideriamo i polinomi $p_1(x) = 2 + 2x + x^2$, $p_2(x) = 1 - 2x + 2x^2$, $p_3(x) = -2 + x + 2x^2$ che formano una base $\mathcal{B}$ dello spazio $\mathbb{R}^3[x]$. Incolonnando le coordinate di questi polinomi rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $R^3[x]$ otteniamo la matrice

$${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Allora possiamo ottenere le coordinate del polinomio $p(x) = a + bx + cx^2$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ moltiplicando ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{C}}(a, b, c)^t$. Calcolando l'inversa di ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}$ troviamo che le coordinate di p rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono $\frac{1}{9}(2a + 2b + c, a - 2b + 2c, -2a + b + 2c)$, e infatti possiamo verificare

$$\frac{1}{9}((2a + 2b + c)(2 + 2x + x^2) + (a - 2b + 2c)(1 - 2x + 2x^2)+ \\ + (-2a + b + 2c)(-2 + x + 2x^2)) = a + bx + cx^2$$